Unidad III

Objetivo específico: Entender ampliamente el fenómeno del comportamiento de los modelos matemáticos para la resolución de problemas enfocados a las ecuaciones lineales.

Conceptos a desarrollar en la unidad: Dar al alumno las herramientas necesarias, para que pueda efectuar el análisis de los sistemas lineales discretos y continuos en la aplicación de las ecuaciones.

3.1 Clasificación y resolución de ecuaciones[1]

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas (o diferenciales) de una función desconocida de una o más variables. Si la función desconocida depende sólo de una variable, la ecuación se llama una ecuación diferencial ordinaria. Sin embargo, si la función desconocida depende de más de una variable la ecuación se llama una ecuación diferencial parcial.

Un ejemplo de ecuación diferencial ordinaria es:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

La variable independiente (v. i) es x

La variable dependiente (v. d) es y

Un ejemplo de ecuación diferencial parcial es:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + 2\frac{d^2V}{dy^2} = V$$

La variable independiente (v. i) es "x" y "y"

La variable dependiente (v. d) es V

Orden de una ecuación diferencial

El orden de una ecuación diferencial está dado por el orden mayor de su derivada.

---

[1] Información obtenida del sitio de Internet monografías.com

Ejemplo;

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \qquad orden\ 2\ por\ \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y''' + y'' + y' + y = sen\ 3x \qquad orden\ 3\ por\ y'''$$

$$(x + y)dx = (y - x)dy \qquad orden\ 1\ por\ "dx"\ y\ "dy"$$

$$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2 \qquad orden\ 2\ por\ y''$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x} \qquad orden\ 4\ por\ "\frac{d^4y}{dx^4}"$$

Grado de una ecuación diferencial

El grado de una ecuación diferencial está dado por el exponente del mayor orden de su derivada.

Ejemplos:

Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias.

1) $e^x \frac{d^2y}{dx^2} + sen\ x\frac{dy}{dx} = x$	2do orden	1er grado
2) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + xy = 0$	3er orden	2do grado
3) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = tan\ x$	3er orden	1er grado
4) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	1er orden	1er grado

Solución de una ecuación diferencial

Una función que cuando se remplaza en la ecuación diferencial da una igualdad, se llama una solución de la ecuación diferencial, por lo tanto, resolver una ecuación diferencial es encontrar una función desconocida que al ser sustituida en la ecuación diferencial se obtiene una igualdad.

Función primitiva de una ecuación diferencial

Es una expresión equivalente a la ecuación diferencial que carece de derivadas.

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

El objetivo es encontrar la función y
dy = 2x dx, pasando dx para poder integrar

$$\int dy = \int 2xdx \qquad integrando$$

$$y = 2\frac{x^2}{2} + c \qquad sumamos\ la\ constante\ c, cuando\ la\ integramos\ a\ \ la\ \ v.i.$$

$$y = x^2 + c \qquad solución\ general\ (por\ c)$$

La expresión es una "función primitiva" de la ecuación diferencial.

Verificación:

$$y = x^2 + c \qquad Solución$$

La solución es aquella función que al ser reemplazada en la variable dependiente "y" satisface la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x$$

$$x = 2x$$

Observación: Al derivar la función primitiva se reproduce exactamente la ecuación diferencial.

Problema de valor inicial

Un problema de valor inicial es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencia sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones iniciales.

Un problema de valor de frontera es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencia sujeta a condiciones sobre la función desconocida especificadas en dos o más valores de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones de frontera.

Ejemplo:

Una curva tiene la propiedad de que su pendiente en cualquier punto (x,y) de ella es igual a 2x. Hallar la ecuación de la curva si ésta pasa por el punto (2,5)

Solución:

Puesto que la pendiente de una curva en cualquier punto (x,y) de ella representa $\frac{dy}{dx}$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Resolviendo la ecuación diferencial

$$dy = 2xdx$$

$$\int dy = \int 2xdx$$

$$y + C_1 = 2\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$y = x^2 + C_2 - C_1$$

La operación $C_2 - C_1$ es otra constante de integración, por lo tanto queda:

$$y = x^2 + C$$

Donde C es una constante arbitraria

Empleando la condición inicial:

$$5 = (2)^2 + C \Rightarrow C = 5 - 4 \Rightarrow C = 1$$

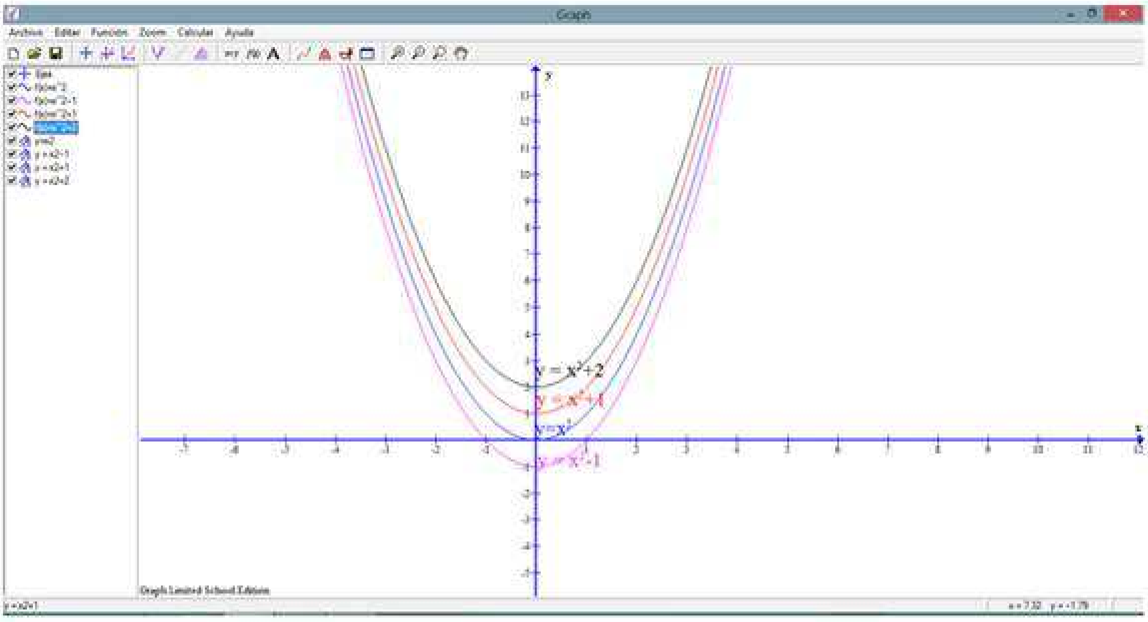
Así la curva requerida está dada por

$$y = x^2 + 1$$

Descripción de una familia de curvas

Gráficamente $y = x^2 + C$ representa una *familia de curvas*, cada miembro de ella está asociado con un valor particular de C.

En la siguiente figura se muestras algunos de estos miembros para C=0,-1, 1, 2.



Puesto que C puede variar, frecuentemente se llama un *parámetro* para distinguirlo de las variables principales *x* y *y*. La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$ que es satisfecha por todos los miembros de la familia frecuentemente se llama la *ecuación diferencial de la familia*.

Gráfica 3.1.1.- Familia de curvas.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Ecuaciones con variables separables

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{x-4}$$

Resolución:

Separando para poder integrar

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{(y+3)}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{(x-4)}}_{g}$$

Transponiendo términos

$$\frac{1}{(y+3)} \cdot dy = dx \cdot \frac{1}{(x-4)}$$

Integrando ambos miembros

$$\int \frac{dy}{y+3} = \int \frac{dx}{x-4}$$

$$\ln(y+3) = \ln(x-4) + c$$

Despejando "y" aplicando la propiedad: $a^{\log_a n} = n$

$$e^{\ln(y+3)} = e^{\ln(x-4)+C}$$

Aplicando la propiedad $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$e^{\ln(y+3)} = e^{\ln(x-4)} e^{C}$$

$$y + 3 = C\,(x-4)$$

$y = C\,(x-4) - 3$ Solución general explicita (cuando se puede despejar y)

Soluciones Particulares

$\boldsymbol{Si\ c = 1}$

$y = c\,(x-4) - 3$

$y = 1\,(x-4) - 3$

$y = x - 7$

$\boldsymbol{si\ c = -2}$

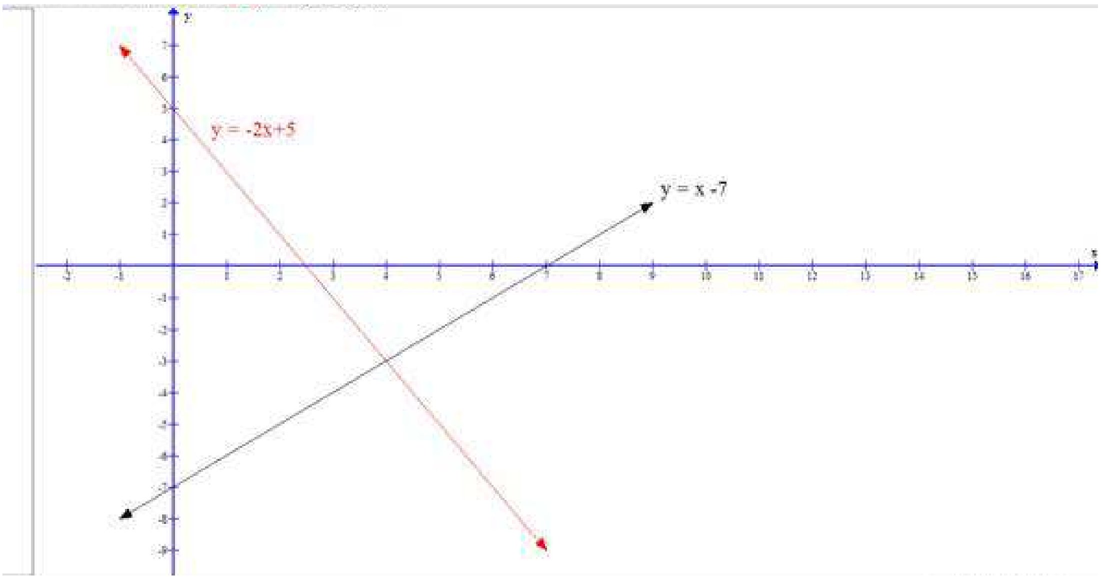
$y = c\,(x-4) - 3$

$y = -2\,(x-4) - 3$

$y = -2x + 8 - 3$

$y = -2x + 5$

Graficando en Graph



Gráfica 3.1.2.- Cruce de rectas.

Comprobación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{x-4}$$

$$\frac{d(\boldsymbol{x}-\mathbf{7})}{dx} = \frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{7}+3}{x-4}$$

$$1 = \frac{x-4}{x-4}$$

$$1 = 1$$

Ecuaciones homogéneas

Es homogénea si no contiene términos que dependen únicamente de su variable independiente, en caso contrario es No Homogénea.

Ejemplos:

$$1)\ e^{m}\frac{d^2m}{dt^2}+t^3\frac{dm}{dt}+mt\frac{dm}{dt}=mt$$

Segundo orden

No lineal

Homogénea

Es homogénea porque no contiene términos que dependen solo de su variable independiente "t".

m (variable dependiente) ; t (variable independiente)

$$2)\ \frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+8xy=2x$$

3er orden

Lineal

No homogénea

Es NO HOMOGENEA porque si contienen un término que depende solo de la variable independiente 2x

$$2)\ \frac{d^2y}{dx^2}+y\frac{dy}{dx}+e^{x}y=0$$

No lineal

Homogénea

Por definición no contiene términos que dependen solamente de su variable independiente

$$4)\ x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{8dy}{xdx}-y=e^{x}$$

Lineal

No homogénea

$e^{x} \rightarrow$ *Este término depende solo de x.*

Ejemplo ilustrativo

Resolver la ecuación:

$$(x^2+y^2)dx-2xydy=0$$

Resolución:

En una ecuación diferencial homogénea se realiza el cambio

$$\boldsymbol{y=ux\quad ;dy=udx+xdu}$$

$$(x^2+(ux)^2)dx-2x(ux)(udx+xdu)=0$$

Realizando las operaciones

$$(x^2+u^2x^2)dx-2x^2u(udx+xdu)=0$$

Eliminando paréntesis

$$x^2dx+u^2x^2dx-2x^2u^2dx-2x^3udu=0$$

Dividiendo para x^2

$$dx+u^2dx-2u^2dx-2xudu=0$$

Términos semejantes

$$dx-u^2dx-2xudu=0$$

Agrupando y factorizando los términos con dx

$$(1-u^2)dx-2xudu=0$$

Separando la variable

$$(1-u^2)dx=2xudu$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{2udu}{1-u^2}$$

$$\frac{dx}{x}-\frac{2udu}{1-u^2}=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{2udu}{u^2-1}=0$$

Integrando

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2udu}{u^2 - 1} = C$$

$$lnx + ln(u^2 - 1) = C$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos

$$lnx(u^2 - 1) = C$$

Cambiando la notación logarítmica a exponencial

$$e^C = x(u^2 - 1)$$

$$Como\ e^C = contante\ se\ obtiene:$$

$$x(u^2 - 1) = C$$

Remplazando $y = ux \quad \Rightarrow u = \frac{y}{x}$

$$x\left(\frac{y}{x^2}^2 - 1\right) = C$$

Realizando las operaciones

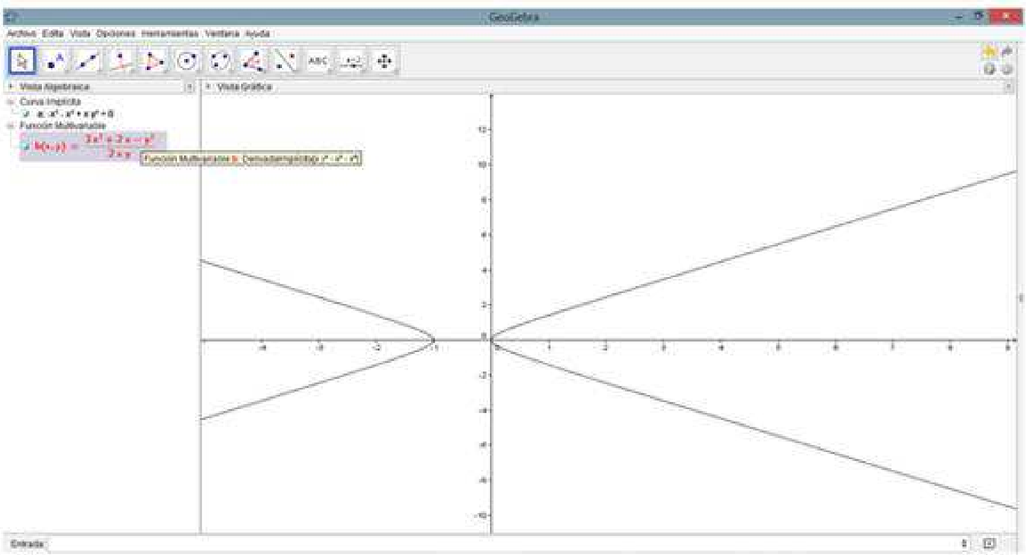
$$x\left(\frac{y^2 - x^2}{x^2}\right) = C$$

$$x(y^2 - x^2) = Cx^2$$

$$xy^2 - x^3 = Cx^2$$

Graficando para un valor arbitrario C = 1

$$xy^2 - x^3 = x^2$$



Gráfica 3.1.3.- Gráfica de valor arbitrario

Ecuaciones exactas

Resolver la ecuación

$$(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$$

Resolución

Para que la ecuación diferencial sea exacta debe cumplir la condición

$$\frac{d(M)}{dy} = \frac{d(N)}{dx}$$

$$(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$$

Derivando parcialmente $2x + y$ con respecto a "y" lo

$$\frac{d}{dy}(2x + y) = 0 + 1 = 1$$

Derivando parcialmente $2y + x$ con respecto a "x"

$$\frac{d}{dx}(2y + x) = 0 + 1 = 1$$

Como cumple la condición se trata de una ecuación diferencial exacta

Como es exacta se tiene que encontrar la función $f(x, y) = C$

$\frac{d\,f}{dx} = 2x + y$; $\frac{d\,f}{dy} = 2y + x$

$$f(x,y) = \int (2x + y)dx = 2\frac{x^2}{2} + yx + g(y)$$

$$f(x,y) = x^2 + xy + g(y)$$

Para encontrar $g(y)$ se deriva la función $f(x, y)$ con respecto a y.

$$\frac{d\,f(x,y)}{dx} = \frac{d}{dy}(x^2 + xy + g(y))$$

$$\frac{d\,f(x,y)}{dx} = 0 + x(1) + g'(y)$$

$$\frac{d\,f(x,y)}{dx} = x + g'(y)$$

Se Iguala las dos derivadas con respecto a y.

$$x + g'(y) = 2y + x$$

$$\int g'(y) = \int 2y$$

$$g(y) = 2\frac{y^2}{2}$$

$$g(y) = y^2$$

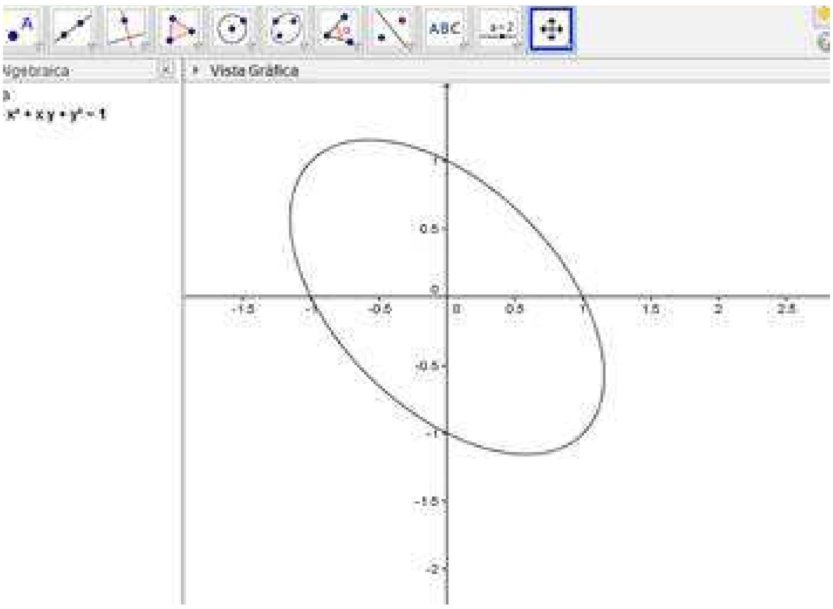
Remplazando $g(y) = y^2$ en $f(x,y) = x^2 + xy + g(y)$ se tiene:

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

Por lo tanto la función $f(x,y) = C$ es

$$x^2 + xy + y^2 = C$$

Graficando la solución de la ecuación diferencial para C = 1



Gráfica 3.1.4.- Gráfica ecuación diferencial con valor = 1

Ecuaciones con factores integrantes

Dada la ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Si las derivadas parciales cruzadas de las funciones no son iguales, la ecuación se denomina lineal no exacta

$$\frac{dM}{dy} \neq \frac{dN}{dx}$$

Para convertirla en ecuación diferencial lineal exacta, en algunos casos se puede obtener un factor de integración μ tal que:

$$\mu \cdot M(x,y)dx + \mu \cdot N(x,y)dy = 0$$

Ecuación diferencial equivalente en la que deberá cumplirse que:

$$\frac{d(\mu \cdot M)}{dy} = \frac{d(\mu \cdot N)}{dx}$$

Una vez obtenida la nueva expresión se puede resolver la ecuación mediante los procedimientos para ecuaciones diferenciales exactas

Para obtener los factores de integración se pueden emplear las siguientes reglas:

Condición	Factor de integración
$\dfrac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = f(x)$	$\mu = e^{\int f(x)dx}$
$\dfrac{\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}}{M} = g(y)$	$\mu = e^{\int g(y)dy}$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$$

Solución:

Se debe verificar si la ecuación diferencial es exacta. Las funciones definidas para las ecuaciones diferenciales exactas son:

$M = x^2 + y^2 + x$

$N = xy$

Obteniendo las derivadas parciales cruzadas se tiene:

$$\frac{dM}{dy} = 2y \quad (Derivando\ considerando\ la\ "x"\ como\ constante)$$

$$\frac{dM}{dx} = y \ \ (Derivando\ considerando\ a\ "y"\ como\ constante$$

Debido a que las 2 derivadas parciales no son iguales, la ecuación diferencial no es exacta.

Como la diferencias entre las 2 derivadas cruzadas dividida para N es una función de "x" se aplica:

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = f(x)$$

$$\frac{2y - y}{xy} = f(x)$$

De donde:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

El factor de integración μ es:

$$\mu = e^{\int f(x)dx}$$

Remplazando la función "f(x)"

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

Aplicando la integral

$$\mu = e^{\ln(x)}$$

Aplicando las propiedades de logaritmos naturales se tiene:

$$\mu = x$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor de integración "x" se tiene una ecuación diferencial equivalente

$$x[(x^2+y^2+x)dx+xydy]=0$$

$$(x^3+xy^2+x^2)dx+x^2ydy=0$$

Para la nueva ecuación se debe redefinir las funciones "M" y "N"

$$M=x^3+xy^2+x^2$$

$$N=x^2y$$

Obteniendo las derivadas parciales cruzadas se tiene:

$$\frac{dM}{dy}=2xy \quad (Derivando\ considerando\ la\ "x"\ como\ constante)$$

$$\frac{dM}{dx}=2xy \ (Derivando\ considerando\ a\ "y"\ como\ constante$$

Debido a que las 2 derivadas parciales son iguales, la nueva ecuación diferencial es exacta.

Como la nueva ecuación diferencial es exacta se procede a resolverla como en casos anteriores. Esta solución queda como tarea para el lector.

$$(x^3+xy^2+x^2)dx+x^2ydy=0$$

Ecuaciones lineales

Resolver las siguientes ecuaciones lineales

$$1)xdy-3ydx=x^2dx$$

Solución

$$x\frac{dy}{dx}-3y=x^2$$

De donde

$$\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y=x$$

Es una ecuación lineal en "y"

Como la solución es

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C\right]$$

Por lo tanto

$$P(x) = -\frac{3}{x} \quad y \quad Q(x) = x$$

Remplazando

$$y = e^{-\int\left(-\frac{3}{x}dx\right)}\left[\int e^{\int -\frac{3}{x}dx} x dx + C\right]$$

Integrando

$$y = e^{3lnx}\left[\int e^{-3lnx} x dx + C\right]$$

Aplicando propiedad de la potencia de los logaritmos

$$y = e^{lnx^3}\left[\int e^{lnx^{-3}} x dx + C\right]$$

Aplicando propiedades de los logaritmos naturales

$$y = x^3\left[\int x^{-3} x dx + C\right]$$

Multiplicación de igual base

$$y = x^3\left[\int x^{-2} dx + C\right]$$

Integrando

$$y = x^3\left[-\frac{1}{x} + C\right]$$

Se obtiene la ecuación característica, para lo cual se sustituye y'' por m^2, y' por m, e y por 1 para obtener una ecuación de la forma $m^2 + am + b = 0$

Por lo tanto la ecuación característica de $y'' - 4y = 0$ es $m^2 - 4 = 0$

Resolviendo la ecuación se tiene $m = \pm 2$

Entonces
$y_1 = C_1 e^{m_1 x} = C_1 e^{2x}$

$y_2 = C_2 e^{m_2 x} = C_2 e^{-2x}$

3.2 Existencia y unanicidad de las soluciones[2]

Existencia y unicidad

Cuando un problema de valor inicial modela matemáticamente una situación física, la existencia y unicidad de la solución es de suma importancia, pues, con seguridad se espera tener una solución, debido a que físicamente algo debe suceder. Por otra parte, se supone que la solución sea única, pues si repetimos el experimento en condiciones idénticas, cabe esperar los mismos resultados, siempre y cuando el modelo sea determinístico. Por lo tanto, al considerar un problema de valor inicial es natural preguntarse por:

Existencia: ¿Existirá una solución al problema?

Unicidad: ¿En caso de que exista solución, será única?

Determinación: ¿En caso de que exista solución, como la determinamos?

En ésta sección nos ocuparemos de las dos primeras interrogantes: existencia y unicidad y dejamos la determinación de solución para el próximo capítulo.

Ejemplo;

Dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

---

[2] Información obtenida de biblioteca virtual de Costa Rica

No resulta difícil comprobar que $y=\frac{x^4}{16}$ es solución, pues separando variables e integrando obtenemos que

$$\frac{dy}{dx}=x\sqrt{y}\Longrightarrow\frac{dy}{\sqrt{y}}=xdx\Rightarrow 2\sqrt{y}=\frac{x^2}{2}+c$$

Y usando la condición inicial $y(0)=0$ obtenemos que $c=0$, con lo cual la solución sería $y=\frac{x^4}{16}$.

Observe que al resolver la ecuación diferencial dividimos por $\sqrt{y}$ lo cual supone que $y\neq 0$, pero podemos verificar que $y=0$ es solución, en este caso una solución singular. En conclusión, el problema de valor inicial dado tiene solución pero no es única, como poder predecir este comportamiento sin tener que resolverlo; el siguiente teorema nos da una respuesta parcial.

Teorema

Sea $R=[a,b]\times[c,d]\subset R^2$ tal que $(x_0,y_0)\in R$. Si $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe un intervalo abierto I, centrado en x_0 y una función $y(x)$ definida en I, que satisface el problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{lcl}\frac{dy}{dx} & = & f(x,y)\\ y(x_0) & = & y_0\end{array}\right.$$

Ejemplo:

En el ejemplo anterior tenemos que $f(x,y)=x\sqrt{y}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}$, las cuales son continuas en el semiplano definido por $y>0$; por consiguiente, el teorema garantiza que para cada punto (x_0,y_0) con $y_0>0$ de ese semiplano, hay un intervalo centrado en x_0 en el cual la ecuación diferencial tiene una solución única. Así por ejemplo, sin resolverlo sabemos que el problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{lcl}\frac{dy}{dx} & = & x\sqrt{y}\\ y(2) & = & 1\end{array}\right.$$

Tiene solución única, mientras que para los problemas en donde $y(x_0) = 0$ el teorema no garantiza nada, es decir, podría suceder cualquier cosa: que no tenga solución, que tenga solución única o varias soluciones, como sucedió en el ejemplo anterior.

Ejemplo:

Hallar los valores de a y b para los cuales el teorema de existencia y unicidad garantiza que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' & = & \frac{x}{y} \\ y(a) & = & b \end{cases}$$

Tiene solución única.

Como la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$ y $f(x,y) = \frac{x}{y}$ son continua en todo punto (x,y) donde $y \neq 0$, el teorema garantiza que existe una solución en el conjunto $(x,y) \in I\!R^2 \| y \neq 0$.

El teorema de existencia y unicidad nos da una condición suficiente. Por lo tanto el hecho de que no se cumplan las hipótesis no nos permite concluir nada. Por otro lado, aunque el teorema nos asegure la existencia no nos garantiza que exista un método para llegar a ella, quizás, lo mejor que podamos hacer sea aproximarla.